
DST n°6

Mathématiques - 28 Mars 2026 - 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le résultat d'une question ou d'un problème peut être admis dans les questions suivantes à condition de le mentionner explicitement.

Aucun document n'est autorisé, l'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdit.

*
* *

Ce sujet comporte 3 exercices tous indépendants.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle inversible ? Justifier.
2. (a) Calculer A^2 et A^3 , puis vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$.
(b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$A^n = a_n A^2 + b_n A$$

vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

- (c) Existe-t-il des réels a_0 et b_0 tels que $A^0 = a_0 A^2 + b_0 A$?
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

- (b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de n .
(c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de b_n en fonction de n .
4. Montre que, pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit $n \geq 3$ un entier. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **magique** quand la somme des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne, et de chaque diagonale sont égales. Ainsi, en notant, pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$:

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \ell_i(M) = \sum_{j=1}^n m_{i,j}$$

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad c_j(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,j}$$

$$d_1(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i} = \text{tr}(M) \quad \text{et} \quad d_2(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,n-i+1}$$

alors :

$$M \text{ est magique si et seulement si : } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \ell_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M)$$

Si M est magique, la valeur de ces sommes est alors notée $s(M)$ et appelée **somme** de la matrice M .

On note \mathcal{E}_n l'ensemble des matrices réelles magiques d'ordre n , et on admet que \mathcal{E}_n ainsi défini est un **sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**

1. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ℓ_i est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers \mathbb{R} .

On admettra dans la suite que pour tout j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, les applications c_j , d_1 et d_2 sont aussi des applications linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers \mathbb{R}

2. On note \mathcal{K}_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ de somme nulle. Montrer que \mathcal{K}_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $M \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$. Montrer que tM est aussi un élément de $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $s({}^tM)$.
4. Soit $M \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $M - \lambda J_n \in \mathcal{K}_n$, avec $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

5. Soit $M \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ et $W_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $(M - s(M)I)W_n = 0$.

Partie 2 - Étude du cas où $n = 3$

On se place dans cette partie dans le cas particulier où $n = 3$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Vérifier que A , J et S sont magiques et préciser leurs sommes.
7. Montrer en raisonnant par analyse-synthèse que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ tel que :

$$M = M_1 + M_2$$

avec M_1 antisymétrique et M_2 symétrique. On rappelle qu'une matrice carrée A est symétrique si ${}^tA = A$ et antisymétrique si ${}^tA = -A$.

8. Soit $M \in \mathcal{K}_3$. On écrit $M = M_1 + M_2$ selon la décomposition vue à la question précédente.

- (a) Montrer que M_1 et M_2 appartiennent à \mathcal{K}_3 .
- (b) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$M_1 = \alpha A \quad \text{et} \quad M_2 = \beta S$$

9. En déduire une base de \mathcal{K}_3 , puis montrer que (A, J, S) est une base de \mathcal{E}_3 .

Exercice 3

Soient n et b deux entiers avec $n \geq 1$ et $b \geq 2$. On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, toutes indiscernables.

Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule sans remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.

Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule avec remise dans l'urne, jusqu'à obtenir une boule blanche.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par A avant de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par B avant de tirer une boule blanche (s'il ne reste plus de boules noires, on a donc $Y = 0$).

Par exemple, si $n = 3$ et $b = 7$ et que les tirages successifs ont donné une boule : « noire, blanche, noire, noire, noire, blanche » alors

- A a effectué deux tirages, il a retiré une boule noire puis une boule blanche de l'urne ;
- l'urne contient maintenant 8 boules dont deux noires et six blanches ;
- B a effectué ensuite cinq tirages dans cette urne, il a pioché 4 boules noires qu'il a reposé dans l'urne après chaque tirage puis il a pioché une boule blanche ;
- X vaut 1 et Y vaut 4.

On pourra noter pour tout entier k entre 1 et $n + b$, B_k l'événement « la k -ème boule tirée par A est blanche » et N_k l'événement « la k -ème boule tirée par A est noire »

I - Étude d'un cas particulier $b = n = 2$

Pour ce cas particulier on pourra s'aider d'un arbre pondéré.

On suppose donc ici que l'urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.

1. Donner les probabilités des événements : $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$.
2. En déduire l'espérance et la variance de X .
3. Montrer que la probabilité de l'événement $[Y = 0]$ est donné par :

$$P(Y = 0) = \frac{1}{2}$$

4. Pour tout entier naturel non nul i , montrer qu'on a :

$$P([X = 0] \cap [Y = i]) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{3}\right)^i$$

$$P([X = 1] \cap [Y = i]) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

et

$$P([X = 2] \cap [Y = i]) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Justifier que $([X = 0], [X = 1], [X = 2])$ forme un système complet d'événements.
6. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $([X = 0], [X = 1], [X = 2])$, en déduire pour tout i dans \mathbb{N} la probabilité $P(Y = i)$ en fonction de i .
7. En utilisant l'expression de $P(Y = i)$ trouvée à la question précédente, vérifier que :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P(Y = i) = 1$$

8. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

II - Retour au cas général

9. Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, calculer la probabilité $P(X = k)$ puis vérifier que :

$$P(X = k) = \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}$$

10. Utiliser la question qui précède pour justifier que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$$

Par conséquent, on vient de démontrer la formule suivante :

$$(\mathcal{S}) : \forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall a \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^N \binom{k+a}{a} = \binom{N+a+1}{a+1}$$

11. Soient $k \geq 1$, $N \geq 1$ et $a \in \mathbb{N}$. Comparer $k \binom{k+a}{a}$ et $(a+1) \binom{k+a}{a+1}$ puis justifier que :

$$\sum_{k=0}^N k \binom{k+a}{a} = (a+1) \sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+a+1}{a+1}$$

12. À l'aide des questions précédentes, montrer que l'espérance de la variable $n - X$ est donnée par :

$$E(n - X) = \frac{bn}{b+1}$$

En déduire l'espérance $E(X)$ de X .